Seno y coseno de la suma de dos números reales

Raúl Vallejo Garamendi

11 de abril de 2017

Sea $y \in \mathbb{R}$. Considere las funciones:

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= \sin(x+y) - \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ f_2(x) &:= \cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

podemos observar que:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \sin(0+y) - \sin(0)\cos(y) - \cos(0)\sin(y) \\ &= \sin(y) - (0)\cos(y) - (1)\sin(y) \\ &= \sin(y) - \sin(y) \\ &= 0. \\ f_2(0) &= \cos(0+y) - \cos(0)\cos(y) + \sin(0)\sin(y) \\ &= \cos(y) - (1)\cos(y) + (0)\sin(y) \\ &= \cos(y) - \cos(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora vamos a ver que pasa con las derivadas de f_1 y f_2.

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\ f_2'(x) &= -\sin(x+y) + \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{aligned}$$

debemos observar que:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_2(x) \\ f_2'(x) &= -f_1(x) \end{aligned}$$

Si consideramos ahora la función:

$$h(x) = (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2$$

y su derivada, tenemos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2f_1(x)f_1'(x) + 2f_2(x)f_2'(x) \\ &= 2f_1(x)(-f_2(x)) + 2f_2(x)(f_1(x)) \\ &= -2f_1(x)f_2(x) + 2f_2(x)f_1(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

por lo tanto, h es una función constante. Bastará evaluarla en un punto para saber qué constante es.

$$\begin{aligned} h(0) &= (f_1(0))^2 + (f_2(0))^2 \\ &= (0)^2 + (0)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces:

$$(f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 = h(x) = 0.$$

Ahora vamos a hacer una estimación:

$$\begin{aligned} 0 \leq (f_1(x))^2 \leq (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 = 0 \\ 0 \leq (f_2(x))^2 \leq (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} f_1(x) = 0 = \sin(x+y) - \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ f_2(x) = 0 = \cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

con lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$